

7. SLOŽENA KOLA (LINEARNE ELEKTRIČNE MREŽE)

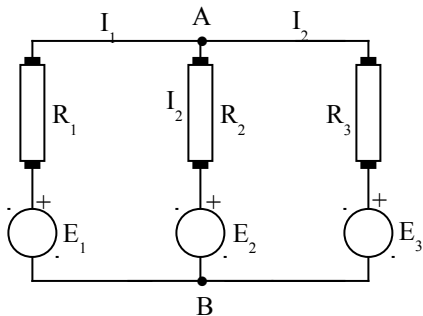
Složena električna kola, koja sadrže provodnike (vodove) i potrošače konstantne otpornosti, napajana sa više izvora predstavljaju **linearne električne mreže**.

Složena kola (linearne električne mreže), koja su po pravila mnogo teža za rešavanje od prostih kola, mogu se rešiti na više načina. U praksi se najčešće koriste sledeće metode:

- 7.1. metoda kirhofovih pravila,
- 7.2. metoda konturnih struja,
- 7.3. metoda zajedničkog napona (metoda potencijala čvorova),
- 7.4. metoda pretvaranja generatora,

- 7.5. metoda superpozicije,
7.6. metoda Tevenena,
7.7. metoda Nortona.

7.1. METODA KIRHOFOVIH PRAVILA



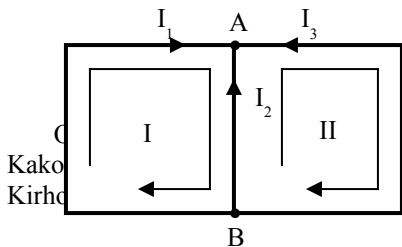
Sl.18.

Postupak primene metode:

- 1) Proizvoljno uzeti smerove struja(sl.18) u granama(npr. sve tri ulaze u čvor B, sl. 19.),
- 2) Postaviti prema prvom Kirhofovom zakonu jednačine (broj jednačina = broj čvorova – 1), sl.19,
- 3) Proizvoljno odabrati smer obilaska konture, sl.19,
- 4) Poštujući smer obilaska konture postaviti jednačine prema drugom Kirhofovom zakonu, čiji ukupan broj odgovara broju kontura (petlji).

Ukupan broj jednačina jednak je broju grana, odnosno broju nepoznatih (one nastaju primenom navedenog postupka). Rešenjem sistema jednačina rešen je dati zadatak.

U cilju jednostavnijeg rešenja zadatka često se umesto šeme (slika 18) koristi graf date šeme, koji je dat na slici 19.



Sl.19.

Na osnovu navedenih postupaka sledi:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \dots\dots \text{ (I Kirh. pravilo)}$$

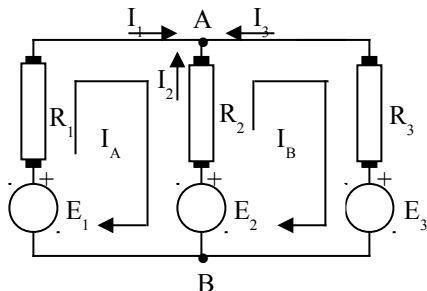
$$E_1 - I_1 R_1 - E_2 + I_2 R_2 = 0 \quad \text{ (II Kirh. pravilo)}$$

$$- I_2 R_2 + E_2 + I_3 R_3 - E_3 = 0 \quad \text{ (II Kirh. pravilo)}$$

7.2. METODA KONTURNIH STRUJA

Ova metoda se zasniva na postavljanju jednačina na osnovu drugog Kirhofovog pravila. Broj jednačina je jednak broju kontura (petlji), što znači za sl.18, slede dve jednačine.

Da bi postavili potrebne jednačine za svaku konturu zamišlja se po jedna struja, koja se naziva konturna struja. Konturnoj struji dajemo proizvoljno smer (ako je to smer kazaljke na satu, sl.20, što odgovara i smeru obilaska kod predhodne metode), i te struje obeležimo sa $I_A, I_B \dots I_n$ (za sl.18, odnosno 20 $\Rightarrow I_A$ i I_B). Na osnovu smera konturnih struja obilazimo sve konture i postavljamo potrebne jednačine, primenjujući drugi Kirhofov zakon.



Sl.20.

$$E_1 - I_A R_1 - (I_A - I_B) R_2 - E_2 = 0 ;$$

$$E_2 - (I_B - I_A) R_2 - I_B R_3 - E_3 = 0$$

Sređivanjem navedenih jednačina sledi:

$$E_1 - E_2 = I_A (R_1 + R_2) - I_B R_2$$

$$E_2 - E_3 = I_B (R_2 + R_3) - I_A R_2$$

Rešenjem ovog sistema jednačina slede vrednosti konturnih struja, koje nam omogućuju rešenja struja po granama. Da bi odredili struje u granama proizvoljno im dajemo smer (Sl.112).

$$\text{Sledi: } I_1 = I_A; \quad I_2 = - I_A + I_B; \quad I_3 = I_B$$

Postupak primene kod metode konturnih struja:

1. Proizvoljno odrediti smer konturnih struja
2. Postaviti jednačine primenjujući II Kirhofov zakon
3. Odrediti struje po granama, čiji smer predhodno proizvoljno odaberemo

Metoda konturnih struja je univerzalna metoda, što znači da je primenljiva u svim složenim kolima. Njena prednost u odnosu na metodu Kirhofovih pravila je manji broj sistema linearnih jednačina (jednostavnije za njihovo rešenje), naročito kod većeg broja grana.

7.3. METODA ZAJEDNIČKOG NAPONA

Ova metoda je veoma praktična ako se više generatora veže paralelno, tj. ako je više grana spojeno između dva čvora (metoda čvorova), a samim tim na krajevima tih grana je isti napon (zajednički). Za sl.20 (odnosno 18), napon između čvorova A i B, za date smerove ems i struja iznosi:

$$U_{AB} = E_1 - I_1 R_1 = E_2 - I_2 R_2 = E_3 - I_3 R_3 \Rightarrow \begin{cases} I_1 = (E_1 - U_{AB}) G_1; \\ I_2 = (E_2 - U_{AB}) G_2; \\ I_3 = (E_3 - U_{AB}) G_3. \end{cases} \quad \text{gde je: } G_1 = 1/R_1; G_2 = 1/R_2; G_3 = 1/R_3.$$

Kako je $I_1 + I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow$

$$(E_1 - U_{AB}) G_1 + (E_2 - U_{AB}) G_2 + (E_3 - U_{AB}) G_3 = 0$$

$$U_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \Rightarrow U_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + \dots + E_n G_n}{G_1 + G_2 + \dots + G_n}$$

Ako je jedna od ems suprotnog smera od nanačenog (ona se ponaša kao kontraelektromotorna sila), pa se ispred nje piše predznak «-». Navedeni izraz odgovara za slučaj: $I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0$, što znači da bi se on koristio sve struje u granama treba usmeriti ka tački A.

Ovom metodom se sve struje rešavaju primenom jedne jednačine sa jednom nepoznatom, što je čini veoma praktičnom (brzo rešenje zadatka). Nedostatak ove metode je taj što se primenjuje kod složenih kola koja imaju samo dva čvora. (Moguća je primena i kod više čvorova, no u tom slučaju ona postaje znatno složenija, a samim tim postaje i nepraktična.)

7.4. METODA PRETVARANJA GENERATORA

Složena kola se rešavaju i pomoću pretvaranja naponskog generatora u strujni i obrnuto. Ova metoda je već obrađena kod pretvaranja generatora, gde se konstatovalo da pomoću pretvaranja odgovarajućih generatora složena kola se transformišu u prosta, čime je i rešenje zadatka postalo prosto.

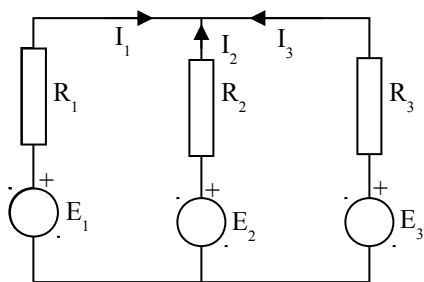
7.5. METODA SUPERPOZICIJE

Metoda superpozicije je metoda pretpostavljenih ugašenih ems izvora.

Postupak pri rešavanju je sledeći:

- 1) Pretpostaviti da su u zadanom kolu sve ems sem jedne ugašene (jednake nuli),
- 2) Izračunati struje u svim granama na osnovu pretpostavljene ems, vodeći računa o njihovom smeru (smer je dirigovan smerom pretpostavljene ems),
- 3) Tačku dva primeniti pojedinačno za svaki izvor (Ovako dobijene struje su samo fiktivne, tj one ne postoje u datim granama. Broj fiktivnih struja jednak je broju ems u kolu),

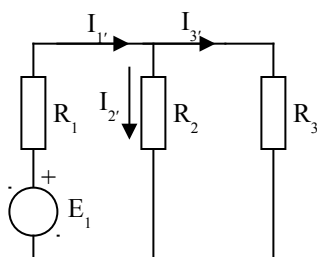
4) Algebarski sabrati fiktivne struje po granama (vodeći računa o njihovom smeru). Data rešenja predstavljaju stvarne struje u granama.



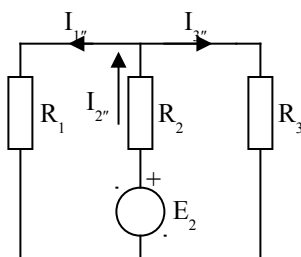
Sl.21.

Primenom navedenih tačaka za složeno kolo prema slici 21 (isto kolo kao na sl. 18), nastaju fiktivna kola prikazana na sl. 21 a), 21 b) i 21 c).

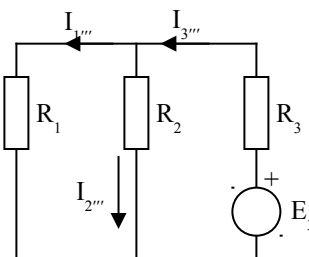
Kolo prema slici 21 (a, b i c) je prosto kolo, pa se u njemu lako reše fiktivne struje (I_1' , I_2' , I_3' , I_1'' , I_2'' , I_3'' , I_1''' , I_2''' i I_3''').



Sl.21.a)



Sl.21.b)



Sl.21.c)

Struje u granama, što ujedno predstavlja konačno rešenje, jednake su:

$$I_1 = I_1' - I_1'' - I_1''' ; \quad I_2 = - I_2' + I_2'' - I_2''' ; \quad I_3 = - I_3' - I_3'' + I_3'''$$

7.6. TEVENENOVA METODA

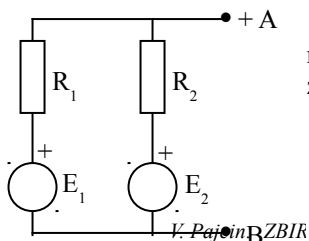
Ova metoda se najčešće koristi kod složenih kola (mreža) kada treba odrediti struju samo u jednoj grani kola. Električna mreža (složeno kolo), u odnosu na bilo koja dva svoja priključka ponaša se kao naponski generator ems E_T . To znači da dato kolo između navedenih tačaka stvara određeni napon, koji predstavlja napon praznog hoda (jer se odgovarajuća grana isključi) i taj napon se naziva **napon Tevenena** E_T . Ovaj napon predstavlja ems naponskog generatora u praznom hodu, koji još ima i svoj unutrašnji otpor, koji se naziva **otpor Tevenena** R_T . Kada se odredi E_T i R_T (parametri naponskog generatora za date tačke) na taj Tevenenov generator ponovo se vraća grana za koju treba odrediti jačinu struje.

Postupak korišćenja Tevenenove teoreme (primenimo na sl 111) :

Pretpostavimo da nam treba jačina struje u trećoj grani.

2) **Isključimo odgovarajuću granu** (treću). Nakon ovog data slika izgleda kao na sl.114.

3) **Izračunati napon Tevenena** E_T



Sl.22.

Za kolo na slici 22 izračunati napon između tačaka A i B. Voditi računa o polaritetu. Metoda je proizvoljna. Prema metodi zajedničkog napona napon je jednak:

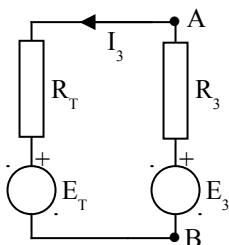
$$E_T = U_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2}$$

3) Izračunati otpor Tevenena R_T . Ovaj otpor je jednak otporu između tačaka A i B (isključene grane). Kako je otpor generatora E_1 R_1 a generatora E_2 R_2 umesto ems E_1 i E_2 pretpostavljamo kratku vezu, a ako u mreži imamo još i strujni generator tada se on pri računanju otpora Tevenena isključi.

Dakle,

$$R_T = R_{AB} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

4) Vratiti isključenu granu na Tevenenov generator. Ovako nastaje slika 23.



Nakon navedenih tačaka, i kola prema sl.23 sledi konačno rešenje za struju u trećoj grani, koja iznosi:

$$I_3 = \frac{-E_T + E_3}{R_T + R_3}$$

Ako se smer struje I_3 uzme suprotan od naznačenog, tada je:

$$I_3 = (E_T - E_3) / (R_T + R_3)$$

Sl.23.

7.7 NORTONOVA METODA

Ova metoda je zasnovana na strujnom (Nortonovom) generatoru. Postupak je isti kao kod Tevenenovog generatora, sa tom razlikom što sada umesto isključene grane činimo kratku vezu (strujni generator). Na ovaj način odredimo **struju Nortonovog generatora I_N** . Otpor **R_N je otpor Nortonovog generatora** i on je isti kao i R_T .

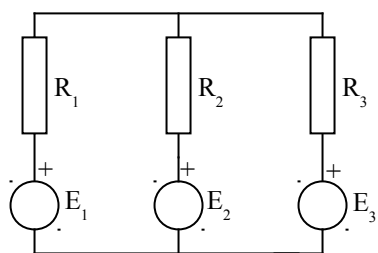
Kako je kod pretvaranja naponskog generatora u strujni (Tevenenova u Nortonov): $I_N = E_T / R_T$; $R_N = R_T$, i obrnuto: $E_T = I_N R_N$; $R_T = R_N$.

Kada smo našli struju u grani koja je bila kratko spojena (I_N) i otpor između tačaka navedene grane, na iste te tačke vraćamo granu u predhodnom obliku, vodeći računa o polaritetu (kao i kod Tevenena). Data grana je sada priključena na strujni (Nortonov) generator. Na osnovu ove veze rešiti struju za datu granu.

Ovim je zadatak rešen (postupak analogan Tevenenovoj metodi).

ZADACI:

7.1.



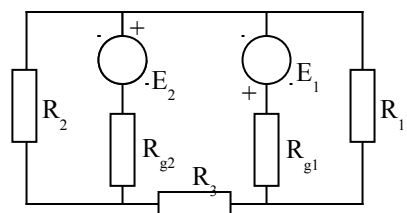
Sl.7.1.

Odrediti jačinu struje u svim granama složenog kola (mreže) na slici 7.1 metodom Kirhofovih pravila. Izračunati snage svih otpornika, kao i svih generatora.

Brojni podaci:

$$E_1 = 20 \text{ V}; E_2 = E_3 = 10 \text{ V}; R_1 = R_3 = 10 \Omega; R_2 = 5 \Omega.$$

7.2.

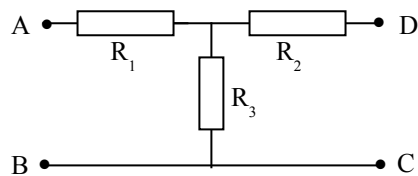


Odrediti struje u svim granama kola, prema sl.7.2, primenom Kirhofovih zakona, ako je:

$$E_1 = E_2 = 30 \text{ V}; R_{g1} = R_{g2} = 1 \Omega; R_1 = 4 \Omega; R_2 = 2 \Omega \text{ i } R_3 = 3 \Omega.$$

Sl.7.2.

7.3.

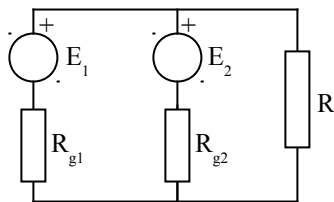


Sl.7.3.

Izračunati struje koje protiču kroz otpore, prema slici 7.3, snage generatora u kolu kao i snagu na otporniku R_3 , koristeći metodu Kirhofovih zakona.

Brojni podaci: $U_{AB} = 12 \text{ V}$; $U_{CD} = 5,6 \text{ V}$; $R_1 = 4 \Omega$; $R_2 = 5 \Omega$; $R_3 = 3 \Omega$.

7.4.



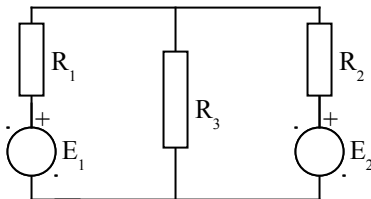
Sl.7.4.

Za kolo na sl.7.4 poznato je: $E_1 = 15 \text{ V}$; $E_2 = 12 \text{ V}$; $R_{g1} = 20 \Omega$; $R_{g2} = 10 \Omega$; $R = 50 \Omega$.

Izračunati, metodom Kirhofovih pravila :

- snagu generatora ems E_1 ;
- struju kroz generator ems E_2
- količinu toplote koja se razvije na prijemniku otpornosti R za vreme od 0,5 h.

7.5.



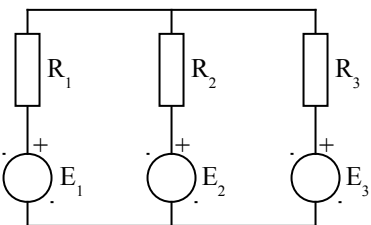
Sl.7.5.

U kolu na sl.7.5 , metodom Kirhofovih pravila, izračunati struje u granama i snagu na generatoru ems E_2 .

Brojni podaci:

$E_1 = 20 \text{ V}$; $E_2 = 10 \text{ V}$; $R_1 = R_3 = 1 \Omega$; $R_2 = 5 \Omega$.

7.6.



Sl.7.6.

Metodom Kirhofovih pravila odrediti, prema sl.7.6, koji od izvora daju, a koji uzimaju energiju.

Brojni podaci:

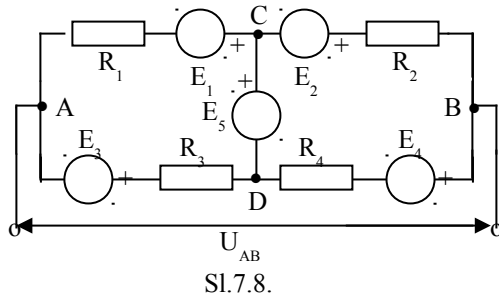
$R_1 = 6 \Omega$; $R_2 = 8 \Omega$; $R_3 = 3 \Omega$; $E_1 = 10 \text{ V}$; $E_2 = 20 \text{ V}$; $E_3 = 30 \text{ V}$.

7.7. Odrediti, metodom Kirhofovih pravila, koji od izvora daje a koji uzima energiju prema slici 7.6.

(zadatak 7.6.)

Brojni podaci : $E_1 = 30 \text{ V}$; $E_2 = 10 \text{ V}$; $E_3 = 5 \text{ V}$; $R_1 = 6 \Omega$; $R_2 = 8 \Omega$; $R_3 = 3 \Omega$.

7.8.



Zadano je, prema slici 7.8:
 $E_1 = E_4 = 60 \text{ V}$; $E_2 = 30 \text{ V}$; $E_3 = 10 \text{ V}$;
 $E_5 = 20 \text{ V}$; $R_1 = R_3 = 10 \Omega$; $R_2 = R_4 = 5 \Omega$.
 Metodom Kirhofovih pravila odrediti napon između tačaka A i B U_{AB} .

7.9. Rešiti zadatak 7.1 metodom konturnih struja.

7.10. Zadatak 7.2 rešiti metodom konturnih struja.

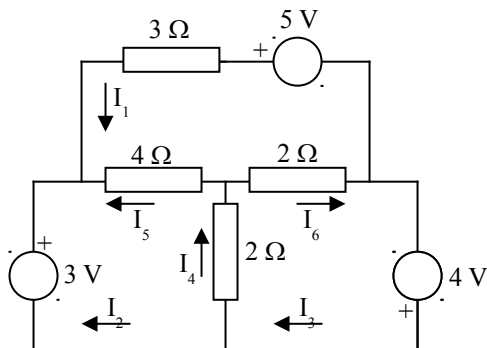
7.11. Zadatak 7.4 rešiti metodom konturnih struja.

7.12. Metodom konturnih struja rešiti zadatak 7.5.

7.13. Metodom konturnih struja rešiti zadatak 7.6.

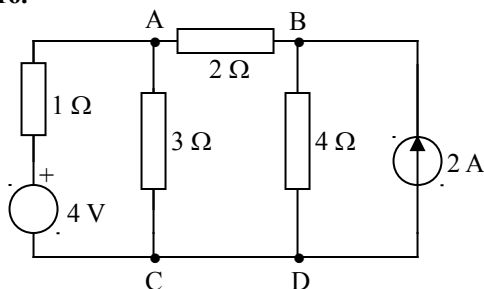
7.14. Zadatak 7.8 rešiti metodom konturnih struja.

7.15.



Za mrežu sa slike 7.15. izračunati jačinu struje u svim granama primenom metode konturnih struja.

7.16.



Izračunati jačinu struja u granama sa slike 7.16 metodom konturnih struja. Koliki je napon U_{CB} između tačaka C i B ?